الموضوع المحاضرة ٢ التاريخ 2015/10/12

الهومومورفيزم الايزومورفيزم الترتيبات:

الهومومورفيزم الترتيبي:

أي تطبيق يحافظ على العمليات بين البنى الجبرية يسمى تشاكل

تعريف نقول عن الدالة

$f: (M, \leq) \longrightarrow (M', \leq)$ من المجموعة المرتبة

كليًا أنها تشاكل هومومورفيزم ترتيبي إذا كانت هذه الدالة تحافظ على العمليات وهنا أصغر أو يساوي.

أي

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad , \forall x, y \in M$$

فاصل ما هنا مش

كيف نعرف الإيزومورفيزم ترتيبي؟؟

ونقول أن f هو ايزومورفيزم ترتيبي إذا كان f متباينًا و f^{-1} ترتيبي (متزايد)

وبالمقابل نسمي f مورفيزم عاكس للترتيب إذا كان f يحقق:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

ونسمي أيضًا ايزومورفيزم عاكس للترتيب إذا كان f متباينًا و f^{-1} عاكس للترتيب

مثال: بين أن الدالة f $f: (R, \leq) \longrightarrow (R, \leq)$

$$f(x) = x^3 + 1$$

هومورفيزم ترتيبي ؟؟

الحل:

مبرهنة: إذا كان f ايزومورفيزم ترتيبي للمجموعات $(M,\leq)$ في $(M',\leq)$ وكان للمجموعة $A \subseteq M$ حد أعلى أصغري للعنصر a فإن $f(a)$ هو حد أعلى أصغري للمجموعة $f(A)$

الاثبات:

① ليكن $y \in f(A)$ بما أن f ايزومورفيزم ترتيبي حسب التعريف يوجد $x \in A$ حيث أن $f(x)=y$ ومنه فإن $x \leq a$

ومن أن f ايزومورفيزم ترتيبي $y = f(x) \leq f(a)$ هذا يعني أن $f(a)$ حد أعلى

ليكن d حد أعلى للمجموعة $f(A)$ وبما أن f ايزومورفيزم ترتيبي

فإن يوجد $t \in M$ حيث $f(t)=d$

ومنه فإن $f(x) \leq f(t)$

وهذا يعني أن t حد أعلى للمجموعة A

وبما أن a حد أعلى أصغري إذاً $a \leq t$

وهذا يعني أن $f(a) \leq f(t)=d$ هذا يؤدي أن $f(a)$ هو حد أعلى أصغري للمجموعة.

الفصل الثاني : الشبكات

تعريف الشبكة :

نقول عن المجموعة المرتبة جزئياً أنها شبكة إذا كان لكل مجموعة جزئية منها مكونة ومؤلفة من عنصرين يوجد حد أعلى أصغري وحد أدنى أعظمي.

نرمز عادة:

$\sup\{x,y\} = x \vee y$

$\inf\{x,y\} = x \wedge y$

ونرمز للشبكة $(M, \leq, \vee, \wedge)$

أمثلة:

1- $X = \{a,b,c\}$ $\quad (P(X), \subseteq)$

هل تشكل شبكة؟

$(P(X), \subseteq, \vee, \wedge)$

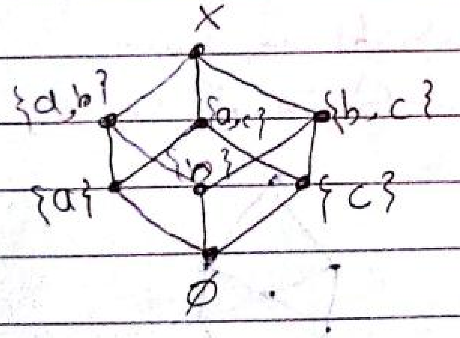
تشكل شبكة لأنه لأي عنصرين منها يوجد sup و inf

$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$

$\forall A,B \in P(X) \; ; \; A \vee B = A \cup B$

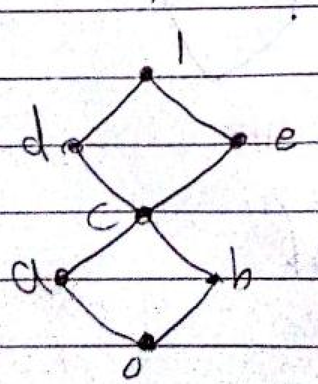
$A \wedge B = A \cap B$

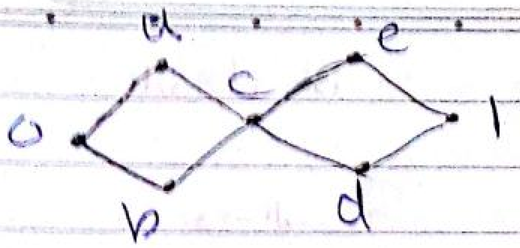
ارسم مخطط هاس لهذه الشبكة؟



2- هل المجموعة التالية الممثلة بمخطط هاس هي شبكة أم لا؟؟

نعم شبكة لأن كل عنصرين يوجد لهما inf و sup.





3- لا تشكل شبكة

لأن $a \vee e$ غير موجود

و $b \wedge d$ غير موجود

4- $(N, 1)$ إذا اعتبرنا:

المضاعف $a \vee b = l.c.m(a,b)$

القاسم $a \wedge b = g.c.d(a,b)$

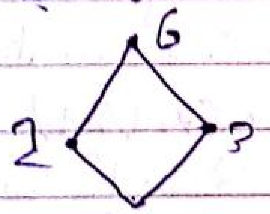
تكون $\{N, \leq, \vee, \wedge\}$ شبكة.

$D(6)$ ، $D(30)$ ، $D(20)$

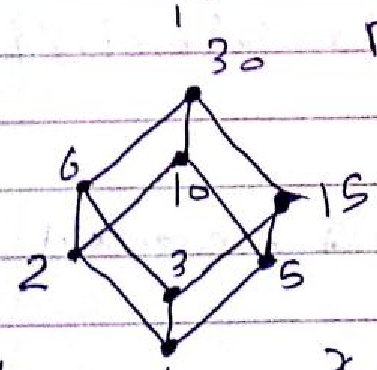
قواسم $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

مجموعة مرتبة جزئية لعلاقة القسمة وتشكل شبكة

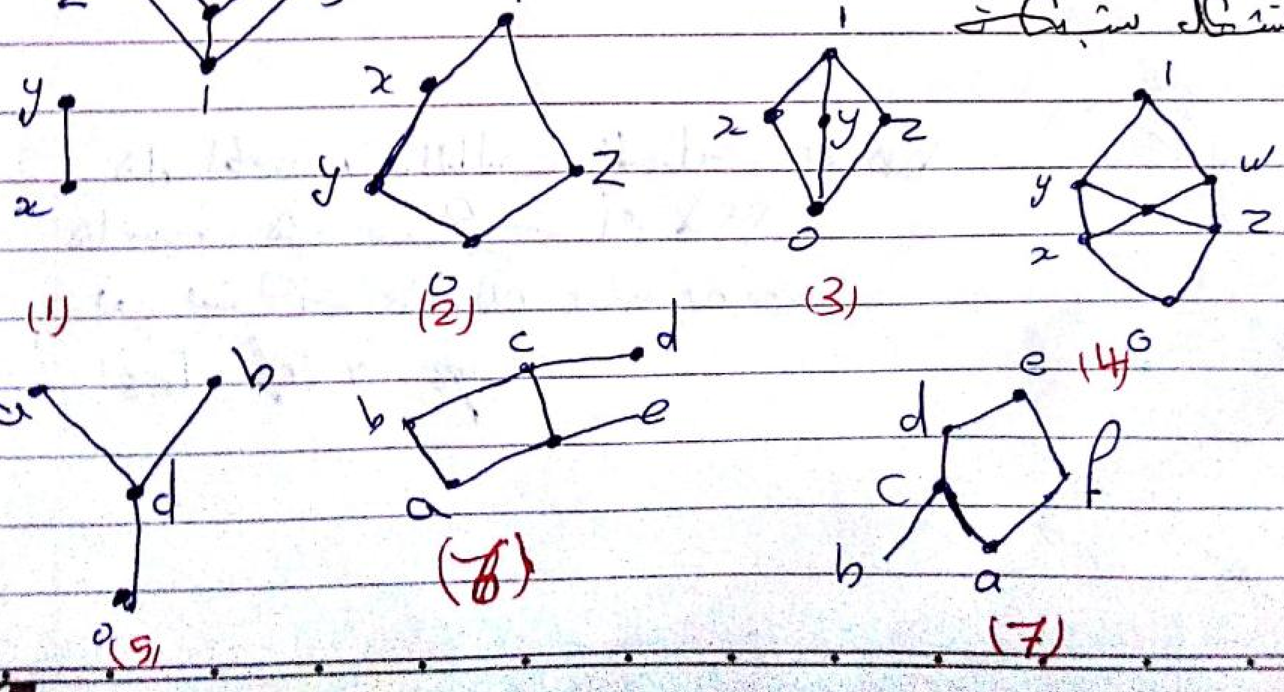
مخطط هاسي لها.



$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



بين أي من المخططات الآتية تشكل شبكة



1) تمثل شبكة
2) شبكة لأن كل مجموعة مكونة من عنصرين تحوي inf و sup
3) شبكة
4) ليست شبكة ، غير موجود $\inf(y,w) = y \wedge w$
5) ليست شبكة . غير موجود $a \vee b$
6) ليست شبكة $c \vee e$ غير موجود
7) ليست شبكة

الخواص الجبرية للشبكات:

مبرهنة: في أية شبكة تتحقق الخواص التالية

1_ خاصية اللانمو $\forall x \in M,\ x \vee x = x,\ x \wedge x = x$

2_ الخاصية التبديلية $x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y = y \vee x$

3_ الخاصية التجميعية $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ و $x \vee (z \vee y) = (x \vee z) \vee y$

4_ خاصية الامتصاص

$x \wedge (x \vee y) = x$

$x \vee (x \wedge y) = x$

الاثبات:

1_ إن $x \wedge x \leq x$

وبما أن $x \leq x$ فإن $x \leq x \wedge x$

$\Rightarrow x = x \wedge x$

2) $x \vee y = \sup(x,y) = \sup(y,x)$
$= y \vee x$

3) $\underbrace{x \wedge (y \wedge z)}_{a} = \underbrace{(x \wedge y)}_{b} \wedge z$

$a = x \wedge (y \wedge z) \Rightarrow$ a هو الحد الأدنى الأكبر $a \leq y , a \leq z$

$a \leq y \wedge z \qquad a \leq x$

$\Rightarrow a \leq x + a \leq y + a \leq z$

$\Rightarrow a \leq (x \wedge y) + a \leq z \Rightarrow a \leq (x \wedge y)$

$b \leq a$

$a = b$.

4) لدينا من جهة ① $x \wedge (x \vee y) \geq x$ حسب تعريف الحد الأدنى الأعظمي

وبما أن $x \leq x$ و $x \leq x \vee y$

أي أن x هي الحد الأدنى للمجموعة المكونة من العنصرين

x ، $x \vee y$ وبالتالي فإن $x \leq x \wedge (x \vee y)$ ②

ومن ① ② تنتج المساواة

ملاحظة (2): إذا كان a, b عنصرين من شبكة ما عندئذٍ

1) إذا كان $a \leq b$ فإن $a \wedge b = a$

2) إذا كان $a \leq b$ فإن $a \vee b = b$

نظرية بلا برهان:

إذا كانت E مجموعة ما تحقق العمليتين الثنائيتين $\vee$ ، $\wedge$ بحيث تتحقق الشروط من [1] إلى [4] [شروط الشبكة الجبرية]

فإنه توجد علاقة ترتيب جزئي وحيدة $\leq$ على المجموعة E بحيث يكون $(E, \leq, \wedge, \vee)$